

LA DERIVADA Y FUNCIÓN DERIVADA EN LOS MERCADOS

THE DERIVATIVE AND DERIVATIVE FUNCTION IN THE MARKETS

Eliseo Ramírez Rincón ¹

Miguel Antonio Alba Suárez, ²

Resumen

Es frecuente en general, que para los estudiantes y algunos profesores la derivada y la función derivada sean un mismo constructo matemático, sin diferenciar la naturaleza conceptual en la que se encuentra su lenguaje, rigor

1 Eliseo Ramírez Rincón, Profesor investigador doctor en Educación, M.sc. en Docencia de las Matemáticas y Licenciado en Matemáticas UPN. Interés investigativo en las líneas de modelación matemática como apoyo a otras disciplinas y Lenguaje matemático en la alfabetización científica, de la facultad de Ciencias Económicas, Administrativas y Contables de la universidad Libre, sede Bogotá Colombia. Grupo de investigación DIMATES, líder del Semillero FRACTALES. Este artículo responde a los resultados de las investigaciones Por una Paz Sostenible, código: 11020144, CAP 205, y, Modelo Financiero para la estimación del Costo de Capital de las Pymes en Colombia. Código: 11020142, CAP 203. Las investigaciones se hicieron en el marco de interés interdisciplinar e intergrupos.

Correo electrónico: eliseo.ramirezr@unilibre.edu.co

<http://www.orcid.org/0000-0002-9885-5714>

https://scholar.google.es/scholar?hl=es&as_sdt=0%2C5&q=Eliseo+Ramirez+Rinc%C3%B3n&btnG=

2 Miguel Antonio Alba Suárez, Doctorando en Administración de Empresas, Economista, Docente Investigador de la Universidad Libre, Grupo de Investigación: Gestión, organizaciones y sociedad. Línea de Investigación: Ambiente y Cultura. Coinvestigador del Proyecto de Investigación: Centro de Producción Comercialización de Productos Orgánicos. Código del proyecto 11020147. Correo: miguel.albas@unilibre.edu.co

y el dominio al que responde cada una, es decir, algebraica (incógnitas) una y de cambio (variable) la otra. Las dificultades padecidas por los estudiantes, también, responden a los períodos de desarrollo epistemológico de la función derivada y en este artículo se hará un análisis en torno a los cambios sufridos que corresponden a tendencias algebraicas como ámbito matemático dominante y al análisis o cálculo como ámbito matemático centrado en el cambio.

Palabras Clave: Derivada, función derivada, cambio, constante, variable.

Abstract

It is frequent, in general, that for students and somebody teachers, the derivative and the derivative function are the same mathematical construct, without differentiating the conceptual nature of their language, rigor and the domain to which each one responds, i.e., static (constant) one and changing (variable) the other. The difficulties suffered by the students also respond to the periods of epistemological development of the derivative function, and this article will analyze the changes undergone, which correspond to algebraic tendencies as the dominant mathematical domain and to analysis or calculus as the mathematical domain centered on change.

Key words: Derivative, derivative function, change, constant, variable.

Resumo

É comum para estudantes e alguns professores que a função derivada e a função derivada sejam uma e a mesma construção matemática, sem diferenciar a natureza conceitual de sua linguagem, o rigor e o domínio ao qual cada uma responde, ou seja, estática (constante) uma e mudando (variável) a outra. As dificuldades experimentadas pelos estudantes também respondem aos períodos de desenvolvimento epistemológico da função derivada, e este artigo analisará as mudanças sofridas, que correspondem às tendências algébricas como domínio matemático dominante e à análise ou cálculo como domínio matemático centrado na mudança.

Palavras-chave: Derivado, função derivada, mudança, constante, variável.

Introducción

El hecho de que en la educación escolar no se diferencien la derivada y la función derivada, genera en los estudiantes conflictos semióticos cuando se presenta la derivada en un punto como un límite, cociente incremental o de otra forma porque el cambio como fenómeno variacional no es comprendido todavía y en consecuencia los estudiantes lo que entienden, son los procedimientos algorítmicos, para resolver los límites o los cocientes incrementales. Además, porque al no establecerse claridad en ellos, entre lo que se debe entender por la derivada y la función derivada, los estudiantes tienden a confundirlas, como lo reporta la historia.

Estos conflictos sobre la derivada y la función derivada se ilustran en los trabajos entre otros de, Cantoral y Farfán (2003) investigadores de la Socioepistemología, desde donde han generado la línea de investigación llamada “Lenguaje y Pensamiento Variacional” en la que estudian la estabilidad del cambio, en distintos ámbitos como: la educación, el currículo, la cultura, ... En este sentido, hay interés por lo que se conoce como función derivada, desde el referente histórico-epistemológico como un proceso cultural y social, en el que el límite y los cocientes incrementales son procesos formales, que se dan, cuando hay estabilidad del cambio como proceso, Cantoral y Farfán (2000 y 2003); Cantoral y López (2010). Dicha estabilidad es lograda entre otras, a partir de los procesos de intuición, desde el cual fueron evolucionando los infinitesimales como magnitudes, números, diferencias, ... y por último diferenciales (variables).

Dado que desde el s. IV a de C., hasta principios del s. XVIII, tanto la intuición como los infinitesimales fueron usados (“necesarios”), aún sin estar cobijados bajo una teoría matemática que los definiera, pero en todo caso orientaron el camino a seguir a los matemáticos, que entre los siglos XVIII y XIX, dotaron al cálculo o análisis con el rigor y formalismo actual, que lo convirtió en un dominio matemático diferente al del álgebra Árabe, la geometría griega o la aritmética de los siglos XV-XVII. Este hecho histórico, permite a este escrito, reafirmar la necesidad de reivindicar la intuición como proceso matemático, acompañado de los infinitesimales, tanto en el uso del lenguaje de la derivada-función derivada, como en la didáctica de la matemática. La intuición, desde la postura de Fischbein (1987), quien en su libro *Intuición en Ciencia y Matemática*, establece algunas

consideraciones sobre la importancia de ésta, en el razonamiento matemático y la ubica como equivalente del conocimiento matemático intuitivo. Otro proceso importante es el de los infinitesimales, los cuales, desde los trabajos de los griegos hasta los trabajos de matemáticos europeos del renacimiento, fueron las ideas previas del cálculo, porque no se conocían todavía los números reales, Boyer (1959/1992) y de alguna forma sirvieron para explicar situaciones de cambio en entornos muy cercanos.

Las ideas previas que tienen los estudiantes sobre el cálculo cuando ingresan a la universidad, se pueden considerar como un conocimiento intuitivo, teniendo en cuenta entre otras razones las siguientes, que subyacen en los escritos de los investigadores antes referenciados: *el lenguaje que tienen los estudiantes sobre la función derivada, está más cerca del álgebra que del cálculo; no se ha estabilizado en ellos el cambio como proceso y por lo tanto la formalización de éste tampoco; el desarrollo histórico del cálculo; los estudiantes alcanzan dominio sobre los procedimientos para resolver límites, cocientes incrementales, derivadas,...pero se les dificulta comprender los significados de éstos; los números irracionales se asumen como números racionales ($\sqrt{2}, \pi, g, \dots$),* Ramírez (2012).

De otra parte, la complejidad del cálculo como dominio matemático, sobrepasa las perspectivas de quienes consideran que enseñar matemáticas es un arte, una técnica o hace parte de una pedagogía de las matemáticas y en este sentido, trabajos en diversos enfoques teóricos como los de Freudenthal (1991); Cantoral y Farfán (2003); Godino, Font, contreras y Wilhelmi, (2005); D'Amore (2006/2003); D'Amore y Godino (2007) y Godino (2010), presentan desarrollos en didáctica de la matemática, en los que establecen diferencias con las teorías generales del aprendizaje como: las teorías del desarrollo de (Piaget, Bruner,...), la pedagogía,..., las cuales por sí mismas, no resuelven la problemática de la enseñanza de las matemáticas, porque esta problemática, no está en la matemática misma, ni corresponde a una cultura particular, uniforme y homogénea; sino que más bien, hace parte de la dinámica compleja de la matemática escolar.

A partir de lo anterior y de acuerdo con D'Amore (2006), para quien el lenguaje matemático está relacionado directamente con 1. Las formas de representar,

sintaxis (los significantes, representantes, ...), 2. Los significados, *semántica* (significados, representados, ...) y los usos, *pragmática* (contextos de uso).

En el aprendizaje de la función derivada, estos tres elementos son complementarios (no excluyentes), se interrelacionan mutuamente y por ende importantes, por lo cual deben ser diferenciados en la matemática escolar, para que los estudiantes no confundan un representante con su representado, por ejemplo, una gráfica, expresión algebraica o una tabla de valores, ..., con la función que representa o que modela; teoría de representaciones de Duval (1999), representaciones semióticas y noética de D'Amore (2004), el uso de las gráficas en la modelación del cambio de Suárez y Cordero (2005), Ramirez (2012).

La estabilidad del cambio como proceso cultural, se asume desde el desarrollo histórico de la función derivada, a la cual contribuyeron trabajos de matemáticos de diferentes épocas y culturas, en la medida que fueron sorteando los conflictos epistemológicos y cognitivos subyacentes. En este sentido, los procesos de enseñanza y aprendizaje de la función derivada son situados, diferenciados y por ende culturales, específicos y no uniformes como características de la didáctica matemática que debe tener en cuenta a la epistemología del saber a enseñar.

Analizando la ruptura epistemológica que dio paso a los números irracionales, con lo que los infinitésimos pasan de ser números, magnitudes, cantidades (s. V a.C. hasta s. XVII) a los infinitésimos como variables (s. XIX) epistemológicamente, esto se propició después de 20 siglos, a partir de los trabajos de Bolzano y de Weierstrass con lo que abrieron el horizonte para generar el conjunto de los números reales con los trabajos de cortaduras de Dedekind y conjuntos de Cantor, posibilitando la configuración rigurosa del cálculo como acontecimiento que ocurrió en el transcurso de por lo menos tres siglos XVIII al XX. Sin embargo, en la matemática escolar como saber institucional, la enseñanza del cálculo se hace a partir del rigor y formalismo del cálculo, a pesar que como lo reportan trabajos como los de Artigue (1995), Cantoral (2000), Ramírez (2006, 2012, 2017) y otros en la (SE) que determinan que la estabilidad del cambio como proceso, en la matemática de primeros semestres de universidad no está en una fase que posibilite un acercamiento entre la enseñanza y el aprendizaje desde el rigor y formalismo matemático de referencia (formal).

Materiales y Métodos

Síntesis histórico-epistemológica del desarrollo de la función derivada.

Dado que la función derivada fue el logro de generalizar ciertas situaciones, como la de la recta tangente a una curva en un punto dado, que fue trabajada desde s. IV a C. por los griegos hasta s. XVI-XVIII en Europa. Los griegos concibieron, que la recta tangente tocaba a una curva en un único punto sin cortarla y para ello, fueron importantes sus observaciones sobre el círculo, a partir del cual la definieron en este sentido. En Grecia florecieron algunas escuelas de pensamiento que se ocuparon de la recta tangente, por ejemplo, la primera escuela de Alejandría conformada por Euclides, Apolonio y Arquímedes. A finales del siglo IV a.C., Euclides presentó en los Elementos de Geometría los resultados relativos a la tangente al círculo, Ramirez (2012, 2017).

Apolonio en el s. III a C., definió la recta tangente a una sección cónica como la recta trazada por el extremo de un diámetro y paralela a las ordenadas (eje vertical). Apolonio demostró (con el rigor griego de la época) la concepción de recta tangente en las cónicas, similar a como Euclides había establecido para el círculo, Boyer (1959/1992, p.203).

En esta época el rigor y formalismo del lenguaje matemático, es asignado entre otros al trabajo de Euclides, *Los Elementos*, escrito en s. III a de C. quien recopiló en 13 libros el trabajo de los matemáticos griegos de los siglos. VI - III a de C. en axiomas, postulados y demostraciones con el rigor de la geometría de ese entonces. Este tratado ha pervivido desde entonces como un documento histórico valioso.

Los comienzos tuvieron una base intuitiva y empírica. El rigor se convirtió en una necesidad con los griegos, y -aunque se lograra poco hasta el siglo XIX- por un momento pareció alcanzado. Pero todos los esfuerzos por perseguir el rigor hasta el final han conducido a un callejón sin salida, donde ya no hay acuerdo sobre qué significa realmente. La matemática sigue viva y con buena salud, pero solo mientras se apoye en una base pragmática. (Kline, 1992).

El estudio hecho por los griegos sobre la recta tangente como caso particular, hubo que esperar hasta los desarrollos conseguidos por los matemáticos del s. XVI. Entre ellos se destacan los aportes de Fermat (1601-1665), quien trabajó

en los puntos máximos y mínimos, como proceso algebraico y consideró en este sentido, que la recta tangente a una curva era paralela al eje “ x ”, y le escribió a Descartes enviándole el método como esencialmente se usa hoy en día, es decir, encontrar máximos y mínimos mediante el cálculo cuando la derivada de la función en un punto es 0 (*cero*). A partir de este hecho Lagrange consideró a Fermat como el inventor del cálculo; sin embargo, hoy en día se sabe que el trabajo de Fermat fue algebraico y que no presentó vestigios de procesos infinitesimalistas y por ende sus trabajos no son considerados como aportes para el desarrollo del cálculo, como sí lo fueron para el de la geometría analítica.

Otros aportes a los desarrollos de la recta tangente desde el proceso algebraico, analítico e infinitesimalista fueron los de; Descartes quien encontró un importante método para determinar las rectas normales en la geometría en 1637, consistió en la intersección doble (raíces dobles), pero correspondió a un enfoque de la geometría analítica. De Baune extendió los métodos de Descartes y los aplicó a las tangentes, pero en forma algebraica. Hudde (1628- 1704) halló un método más simple para hallar las rectas tangentes, conocido como Regla de Hudde, consistía básicamente en la derivada como un proceso algebraico. En el estudio por consolidar el conocimiento sobre la recta tangente, se cruzó en el camino la velocidad la cual también estaban trabajando algunos investigadores como Galileo (1564-1642) y Torricelli (1608-1647) desde la mecánica.

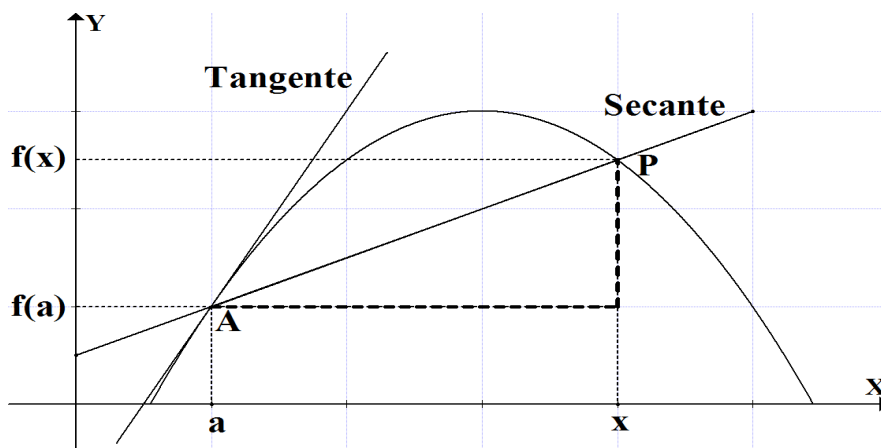
El siguiente gran paso fue proporcionado por Torricelli, quien su estudio sobre la cicloide, lo llevó a la cuadratura y a la recta tangente en un punto de una curva. En un comienzo consideró a la recta tangente al estilo clásico, es decir la recta que tiene solo un punto de contacto con una curva, sin embargo, a través de sus estudios sobre mecánica (hoy física), se dio cuenta que desde la dinámica de partículas en la que un punto P , de una curva de un círculo está sometido a dos movimientos de traslación y de rotación. En tal sentido representó la velocidad del movimiento de traslación mediante un segmento paralelo a la recta sobre la que se mueve el círculo y la velocidad de rotación, por un segmento tangente en P , al círculo, en donde al ser iguales las velocidades lo son también ambos segmentos y la composición de las dos velocidades determina la tangente a la cicloide en P , es decir la bisectriz de los dos segmentos. Este hecho llevó a una disputa entre él y Roberval quien lo acusó de plagio, dado que había encontrado

los mismos resultados antes que Torricelli; es necesario destacar sin embargo que Roberval no los había publicado todavía (Boyer, 1959/1992).

De otra parte, Barrow (1630-1677) presentó un método de rectas tangentes a una curva, en el que se da la tangente como el límite de una serie de puntos que se aproximan entre sí. Este método fue conocido como *triángulo diferencial de Barrow*, pero con un enfoque eminentemente algebraico, parecido al de Fermat, sólo que Barrow alcanzó a entender la relación entre los procesos de integración y derivación, aspecto que le sirvió a Newton, para determinar el teorema fundamental del cálculo.

La siguiente gráfica, presenta una interpretación geométrica del triángulo de Barrow como proceso que va de los infinitesimales hacia el límite.

Considerando la gráfica de una función $y=f(x)$, en la que están los puntos $A(a, f(a))$, y $P(x, f(x))$ distintos.



Gráfica 1. $Y = f(x)$ Fuente: Propia con ayuda de Geogebra

La pendiente de la recta secante es la tasa de variación media entre el incremento de la función y el incremento de la variable.

$$m = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad [\text{Ec. 1}]$$

Si se hace que $x \rightarrow a$ (x , tienda a a) el punto P , se va aproximando al punto A , y también la pendiente de la recta $\overrightarrow{AP}$ a la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto A , lo que ahora se conoce como tasa de variación instantánea entre el cociente del incremento de la función y el incremento de

la variable, claro usando el límite, pero Barrow desarrolló esta idea como un proceso algebraico, desprovisto de un enfoque infinitesimalista; sin embargo, esto mismo se hace hoy en día usando el límite (el cual no era conocido en esa época) sobre el cociente incremental para determinar la función derivada.

$$\lim_{x \rightarrow a} m = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) \quad [\text{Ec. 2}]$$

La pendiente de la recta tangente a la curva en el punto $A(a, f(a))$, es la derivada de f evaluada en a , es decir que $f'(a) = m_{\text{tangente}}$ pendiente de la recta tangente o velocidad instantánea, lo cual corresponde a desarrollos matemáticos generados por matemáticos como: Bolzano, Weierstrass, Cantor, Dedekind y Cauchy entre los siglos XVIII y XIX, que permitieron esta definición, con el rigor actual.

El proceso comunicativo de la derivada generado en la comunidad de matemáticos de los siglos XVI-XVII se hizo con un lenguaje difuso y con otro rigor diferente al actual. En este período, se ubica un segundo avance del rigor y formalismo del lenguaje matemático, en el cual todavía tenían cabida los infinitésimos y la intuición como elementos centrales en los trabajos de los matemáticos, se apartaron del lenguaje griego e intentaron desde la geometría, el álgebra y la aritmética conocidas, definir los infinitesimales como números. A partir de los trabajos de matemáticos de este período se inicia una tercera y última etapa del lenguaje matemático para la función derivada, según la investigación hecha. (Boyer, 1959/1992).

Algunos significados, asociados a los usos asignados a la recta tangente como conocimiento matemático (números, geometría, fenómeno variacional, mecánica, cambio, ...), que generaron los significados (cociente incremental, razón de cambio, recta tangente, velocidad, límite, marginalidad, máximos y mínimos...) asociados a la pendiente de la recta tangente como un límite. El desarrollo y consolidación de este conocimiento matemático, entre los siglos XVI-XIX, es a lo que Cantoral y Farfán (2003), Montiel (2005a), Cantoral et-al (2007) llaman estabilidad del cambio.

Se ha evidenciado a través de innumerables investigaciones que el límite como estructura rigurosa del cálculo presenta dificultades a los estudiantes que inician su aprendizaje del cálculo, por su lenguaje riguroso y formal; pues éstos por

intuición, tienden a confundir la derivada en un punto (un número) con la función derivada. Esta confusión se puede presentar porque no es claro el significado de un h cercano a cero (como diferencia, diferencial o incremento). Por ejemplo, al expresar que f es una función que existe y es continua en todo punto de un intervalo abierto I , que contiene a los puntos $(x, f(x))$ y $(x+h, f(x+h))$ con h positivo cercano a cero y donde se cumple que: $x_1 = x + h$ o $h = x_1 - x$, se generan conflictos para los estudiantes porque, de una parte las diferencias de la forma $x_1 - x$ pueden ser positivas o negativas, pero la métrica del valor absoluto establece que $|x_1 - x| = |x - x_1| \geq 0$.

De otra parte, porque si estas diferencias $|x_1 - x| = h$, tienden a cero, entonces se cumple que $h = \partial x$, lo que implica que se pasa de una diferencia (número) a un diferencial (variable) y en este proceso los infinitésimos dejan de ser números para convertirse en variables, aspecto que genera conflictos a los estudiantes, porque cuando los infinitésimos son números no están en el conjunto de los reales y de otra cuando son variables, porque posiblemente no hay estabilidad del cambio como proceso en los estudiantes. Este aspecto fue conflictivo inclusive para los matemáticos de varias épocas que debieron recurrir a la intuición (antes de formalizar los números irracionales), para razonar y comprender los procesos de derivación e integración inclusive, como lo reporta la historia en los trabajos de Leibniz (infinitésimos) y Newton (fluxiones), que concluyeron en la formalización del cálculo.

Según la historia y la epistemología de la función derivada; ni Newton ni Leibniz formalizaron este conocimiento como se conoce actualmente, sin embargo, ellos son considerados los gestores de éste, como conocimiento nuevo e independiente de los dominios matemáticos ya existentes hasta el s. XVII. Este aspecto permite reivindicar a la intuición como proceso matemático, importante y útil para afianzar las ideas básicas del cálculo en estudiantes que se inician en su aprendizaje. Por ejemplo, al enseñar directamente el límite de funciones con vecindades de la forma $(x \pm \varepsilon, y \pm \delta)$, gráficamente y con la definición de éste, es usual que los (as) estudiantes tengan conflictos con el lenguaje formal del cálculo por su rigor.

Las ideas básicas que fueron construyendo este conocimiento se pueden proponer a través de situaciones (talleres, guías software,...) en las que se vayan

generando las vecindades alrededor de un punto tanto para x , como para y , así como de los acercamientos por izquierda y por derecha o por arriba y abajo de un y , según la vecindad como límite intuitivo; es decir el ancho de la vecindad, que permita introducir la noción de diferencia $(x-x_1, y-y_1)$ como valores Δx ó Δy , y con ello poder determinar la pendiente de la recta secante, para dar sentido a la noción de diferencial “*qué tan cerca de un valor...*” como $\partial x = \Delta x$, si Δx tiende a cero; por lo tanto $\partial y = \Delta y$, a partir del proceso intuitivo y con esto hallar la pendiente de la recta tangente en un punto como $m = \partial y / \partial x$.

A partir de lo anterior y teniendo en cuenta que la función derivada generalizó los significados asociados a la velocidad, razón de cambio, marginalidad, máximos, mínimos y recta tangente entre otros. Es posible entonces, revisar esta generalización a partir de la recta y teniendo en cuenta que las rectas secante y tangente son de la forma $y = mx + b$. Asumiendo, ***m*: pendiente de la recta secante** que pasa por los puntos con coordenadas (q, p) y (q_1, p_1) y b , punto de corte con el eje de las ordenadas (*eje y*), se tiene:

$$m_{sec} = \frac{p_1 - p}{q_1 - q} = \frac{p_1 - p}{\Delta q}, \text{ de donde, } m_{sec} \Delta q = p_1 - p, \text{ y como también se cumple}$$

$$\text{Que } p_1 = p + \Delta p, \text{ entonces } m_{sec} \Delta q = p + \Delta p - p, \text{ luego } m_{sec} = \frac{\Delta p}{\Delta q}$$

$$\text{Ahora si } q \rightarrow q_1, \text{ entonces } m_{sec} \rightarrow m_{tan}, \quad y, \quad m_{tan} = p$$

$$\text{De donde se tiene que } p' = \frac{dp}{dq} \text{ y por lo tanto si } \Delta q \rightarrow 0, \text{ entonces}$$

$$\frac{p(q + \Delta q) - p(q)}{\Delta q} \cong p'(q), \quad y, \quad p'(q) \Delta q + p(q) = p(q + \Delta q), \text{ si}$$

$$dq \rightarrow 0, \text{ entonces se tiene que } \frac{dp}{dq} \Delta q + p(q) = p(q + \Delta q), \text{ y,}$$

$$\text{como } dq \cong \Delta q, \text{ entonces } dp + p = p(q + \Delta q).$$

De lo anterior se deduce que la vecindad de la variable independiente q , afecta a la vecindad de la variable dependiente p .

En este escrito, la recta tangente se presentó como un ejemplo del desarrollo histórico de los procesos intuitivo y formal en la consolidación del cálculo, también como un conocimiento importante en la enseñanza de la función derivada. Del primer aspecto dan cuenta las diversas formas como algunas culturas concibieron a la recta tangente según la historia, desde los griegos (*recta que corta a una curva en un único punto: geometría euclidiana*) hasta la

definición rigurosa y formal del límite (*en el entorno de un punto de una curva dada: cálculo*).

Conflictos

Una función f continua, en un Intervalo abierto $(x, x+h)$, es derivable si existe el límite:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right) \text{ Como cociente incremental} \quad [\text{Ec. 3}]$$

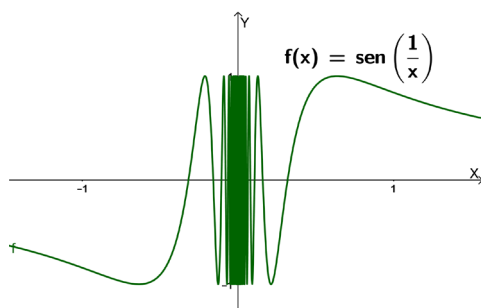
Definición de la derivada en un punto como límite de un cociente incremental.

Una función f , definida para todo x , en un intervalo abierto que contenga a x_0 , es derivable en x_0 si existe el límite:

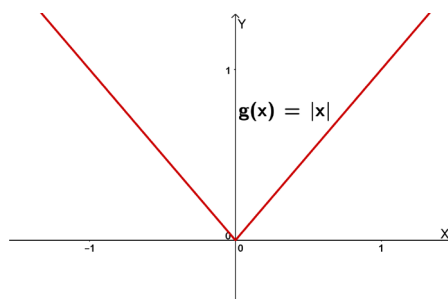
$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \quad [\text{Ec. 4}]$$

Para los estudiantes no es clara la diferencia entre las definiciones de función derivada y derivada en un punto. Por ejemplo, la siguiente definición: *una función f , es diferenciable en un punto $(x, f(x))$, si su derivada es continua en dicho punto*. El conflicto se presenta, porque se confunde el hecho que toda función diferenciable en un punto $(x, f(x))$ es continua también allí, con su recíproco, es decir que toda función continua es diferenciable, lo cual no siempre se cumple como se verá en las gráficas 4 y 5 ejemplos de aplicación en los mercados. La modelación gráfica también genera conflictos a los estudiantes, por ejemplo, en funciones como las siguientes.

Evaluar la diferenciabilidad en $x=0$, de las funciones representadas en las siguientes gráficas2, 3:



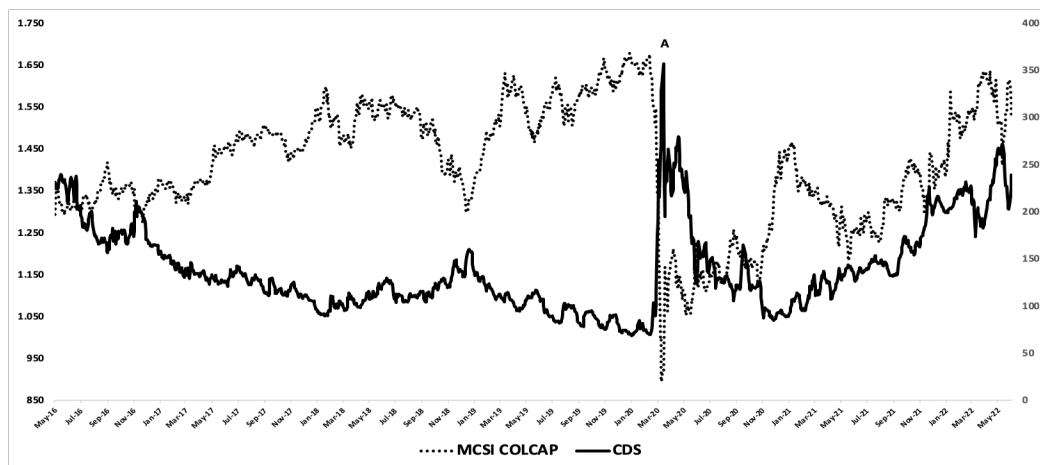
Gráfica 2 Fuente: Propia



Gráfica 3 Fuente: Propia

Caso particular en los mercados: una función continua en todo punto y diferenciable en ninguno.

Gráfica 4. CDS y Bolsa de valores de Colombia (MSCI COLCAP) -período 2016-mayo-2022-



Gráfica 4 Fuente: Bloomberg, 2022

La prima de riesgo o CDS³ es un tipo o clase de “swap” canje que se explicita en el mercado como un seguro de incumplimiento por parte del emisor respecto a un activo financiero. En este sentido en la gráfica 4, se visualiza el CDS de Colombia correspondiente a la referencia de vencimiento a 10 años del país del mercado de deuda pública VS el comportamiento del mercado de renta variable a través del índice COLCAP⁴

³ CDS “Credit default swap” Un swap de incumplimiento crediticio es un tipo particular de swap diseñado para transferir la exposición crediticia de productos de renta fija entre dos o más partes. En un swap de incumplimiento crediticio o CDS el comprador del swap realiza pagos al vendedor de este instrumento hasta la fecha de vencimiento de un contrato. En ese sentido, a cambio, el vendedor acepta que, en caso de que el emisor de la deuda incumpla o experimente otro evento de crédito, el vendedor pagará al comprador la prima del valor, así como todos los pagos de intereses que se habrían pagado entre ese momento y la fecha de vencimiento del valor.

El swap de incumplimiento crediticio o CDS es la forma más común de derivado crediticio y puede incluir bonos municipales, bonos de mercados emergentes, valores respaldados por hipotecas o bonos corporativos. Un swap de incumplimiento crediticio también suele denominarse contrato de derivado crediticio.

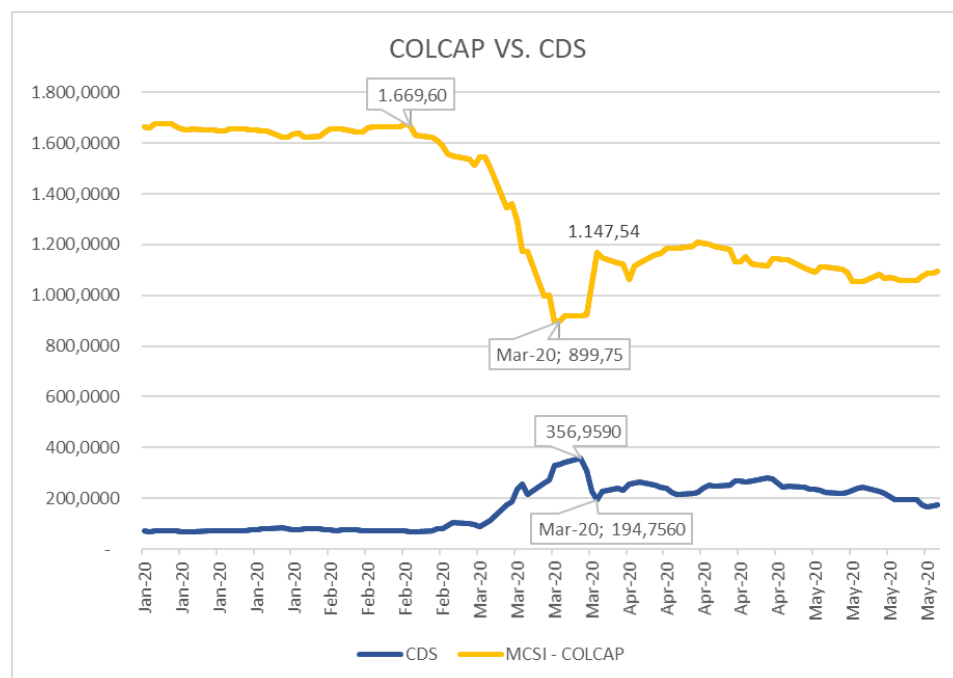
La prima se cotiza en puntos básicos

⁴ COLCAP es el índice bursátil que muestra las variaciones de los precios de las 25 acciones que cuentan con mayor liquidez en el mercado

De acuerdo con lo anterior se puede observar que existe una relación inversamente proporcional entre el CDS y el mercado de renta variable, es decir que cuando aumenta la percepción de riesgo, se genera una caída de la bolsa de valores como consecuencia de un posible “default” en el país, lo cual propicia una liquidación del portafolio de inversión en pesos y una salida del capital vía compra de dólares.

cuando la OMS informó al mercado que el mundo estaba en pandemia producida por la COVID-19 en marzo de 2020, se propició una caída en las bolsas del mundo incluida la bolsa de valores de Colombia inducida por una mayor percepción del riesgo en donde el CDS para el país se ubicó en máximos históricos mediante un registro de 350 pb.

Gráfica 5. Detalle de algunos puntos de la Bolsa de valores de Colombia (MSCI COLCAP) – Enero – mayo 2020



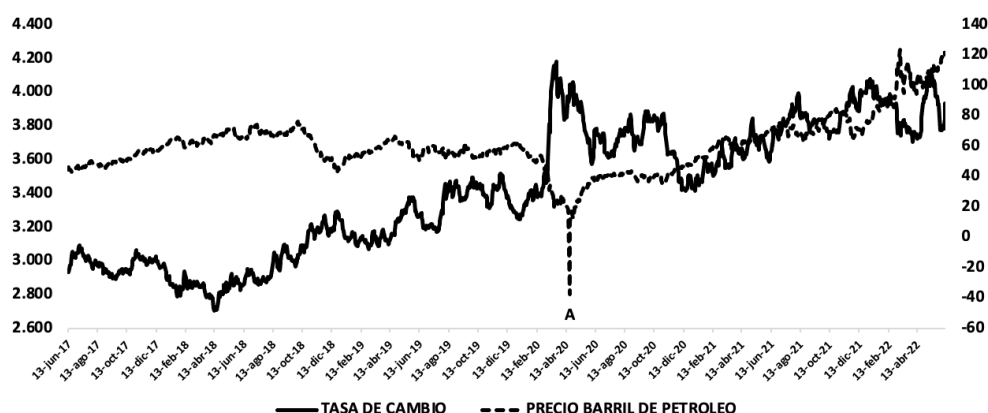
Gráfica 5.

Fuente: propia con datos procesados en Excel.

El comportamiento, de las dos líneas en azul y amarillo, corresponde al de una función continua en todo punto (del intervalo tomado) pero diferenciable en ninguno y en este sentido se presenta un ejemplo de una situación real a través del comportamiento de los mercados que generan funciones con picos y que permiten entender una de las grandes dificultades de los estudiantes al estudiar los conceptos de continuidad y diferenciable.

El aumento de la prima de riesgo vía CDS antes de la COVID-19 ha estado principalmente vinculado al desempeño de las finanzas públicas, así como el contexto internacional principalmente con el comportamiento de los precios del barril de petróleo, que en el periodo 2016 a 2018 estuvo por debajo de los USD 50 el barril como se puede observar en la siguiente gráfica 6:

Gráfica 6. Precio Barril de petróleo referencia WTI vs Tipo de cambio COP/USD período 13 de abril de 2017 al 11 de junio de 2022



Gráfica 6.

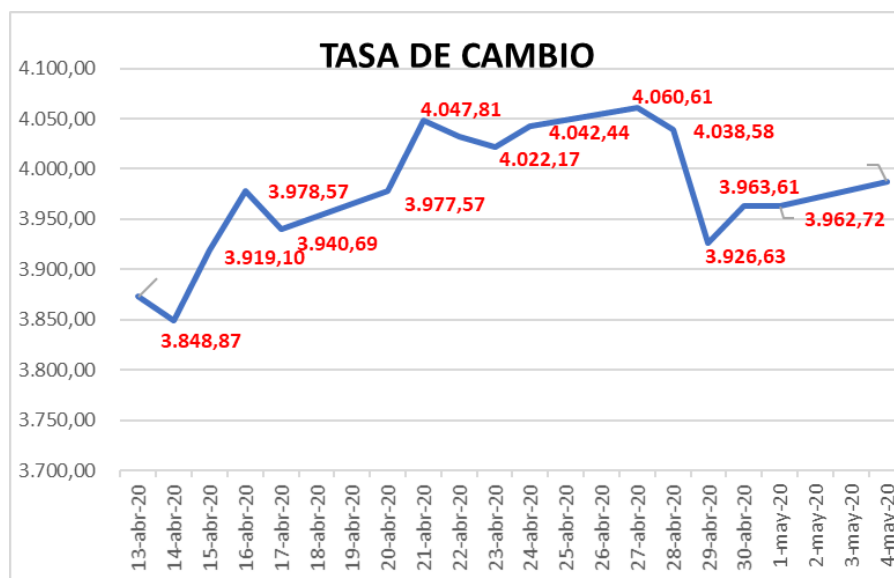
Fuente: Bloomberg, 2022

Como se puede observar en la gráfica 6, existe una relación inversa entre el precio del barril del petróleo y el tipo de cambio que se visualiza hasta el 13 de abril de 2020, cuando el precio del barril de petróleo cotizó por debajo de -20 USD el barril y la cotización de la divisa de igual manera cayó como consecuencia de la mayor oferta de crudo en el mercado de los “commodities energéticos”. En ese sentido posteriormente a esta situación en el mercado internacional se

rompe la correlación coadyuvada a que la firma Standard & Poor's⁵ le bajo la calificación de riesgo en la parte larga de la deuda al pasar de BBB- a BB+ producto del análisis de mayor percepción de riesgo en las finanzas públicas como consecuencia que el país experimenta mayor endeudamiento y menores ingresos que ha coadyuvado a acrecentar el déficit fiscal.

En la actual coyuntura, el conflicto geopolítico producto del conflicto de Ucrania-Rusia ha puesto nervioso a los mercados, así como el hecho que el 5 de mayo de 2022 la FED haya tomado la decisión de subir la tasa de interés 50 pb colocándola en el 1%. Ante esta situación, el mercado colombiano decidió liquidar su portafolio en renta variable y fija mediante la compra de dólares a pesar de que, el barril de petróleo supera los USD 100 en el mercado, rompiendo la relación inversa entre el tipo de cambio y el barril de petróleo. En ese sentido, el movimiento de la divisa ha aumentado su volatilidad por la incertidumbre internacional a pesar de que el barril de petróleo supera el techo de los USD 100.

Gráfica 7. Detalle de algunos puntos de la gráfica 6. Precio barril de petróleo



Fuente propia, puntos graficados con Excel.

5 La firma Standard & Poor's e ha llamado la atención a Colombia de la forma como viene manejando sus fianzas públicas sobre todo en la parte larga de la curva, es decir los títulos que tienen vencimiento superior a los 5 años, así como el hecho que el país requiere una reforma estructural en sus finanzas públicas que permita aliviar la carga inelástica con que cuenta el gasto público, el cual es del 90%.

La gráfica 7, presenta en detalle algunos puntos de la función “Tasa de Cambio” en cuyos picos cumple con ser una función continua, pero, en ellos la función tasa de cambio no es diferenciable, es decir, que dicha función no puede derivarse en esos puntos en los que se definen máximos y mínimos para ella.

Conclusiones

- la historia de las matemáticas ha permitido detallar los hechos que dieron origen a la transición derivada-función derivada y con ella al cálculo o análisis.
- La geometría griega y el álgebra simbólica de Vieta, no fueron suficientes para explicar algunos problemas que dieron origen al cálculo, pero en cambio permitieron el desarrollo de la geometría analítica a través de trabajos como los de Fermat y Descartes.
- En los procesos de enseñanza y aprendizaje del cálculo (análisis) la didáctica matemática, nacida en la escuela francesa en la década de 1970, intenta responder a la problemática de la matemática escolar como una ciencia emergente, cuyo objeto de estudio es su enseñanza.
- Los significados de la función derivada están ligados al desarrollo histórico del conocimiento, a través de los usos reportados en cada época, en particular a partir del s. XVI en adelante.
- Las situaciones que generaron el conocimiento de la recta tangente y de la velocidad, estudiados por los griegos del S. IV a. C. y posteriormente por los matemáticos del s. XVI al XX permitieron el nacimiento del cálculo a través de lo que hoy se conoce como función derivada. Evidenciando el paso de una solución particular (griegos) a una solución general (occidente).
- Los significados asociados a la función derivada permean las prácticas de disciplinas como: ingenierías, ciencias naturales, ciencias sociales y humanas.
- Dotar de sentido al conocimiento que dio origen a la función derivada a través de los usos y significados, permite un aprendizaje contextualizado del cálculo.
- Los significados y los usos de la función derivada son culturales, locales y por ello en la matemática escolar estos son aspectos que le dan sentido.
- El surgimiento de los números irracionales contribuyó a esclarecer el concepto de función derivada, pasando de los evanescentes (infinitésimos) como números a cantidades variables.

- Los ejemplos contextualizados en situaciones reales permiten entender mejor a los estudiantes las definiciones rigurosas del cálculo.

Bibliografía

- Artigue, M.; Douady, R.; Moreno, L. y Gómez, P. (Ed.), (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. Ingeniería didáctica en Educación Matemática. pp. 97-140. "Una Empresa Docente" & Grupo Editorial Iberoamérica. Impreso en México.
- Boyer, C. (1959/1992), Historia de la Matemática. (Segunda reimpresión), versión española de Mariano Martínez Pérez. Alianza Universidad Textos, Madrid España.
pp. 125-131, 203, 246, 408-419, 477-508.
- Brousseau, G. (1993/1983). "Fundamentos y Métodos de Didáctica de las Matemáticas" en Lecturas en didácticas de las matemáticas. La Escuela Francesa. CINVESTAV, México, 1993.
- Brousseau, G. (1986). *Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, Recherches en Didactique des Mathématiques*. vol. 7.2. pp 33-115.
- Brousseau, G. (1989). La tour de Babel, IREM, *Études en Didactique des Mathématiques*, 2. IREM de Bordeaux.
- Camacho, A. y Sánchez, B. (2010). Análisis sociocultural de la noción de variabilidad. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Número especial (aceptado para su publicación). Presentado en las Memorias de la XIII Escuela de Invierno de Matemática Educativa. Red CIMATES, Tecnológico de Monterrey 12-16 dic. 2010.
- Cantoral R. y Farfán R. (2000). *Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis*. En El futuro del Cálculo Infinitesimal, ICME-8. Sevilla, Grupo Editorial Ibero América, pp. 69-91.
- Cantoral, R. y Miron, H. (2000). Sobre el estatus de la noción de derivada: de la epistemología de Joseph Louis Lagrange al diseño de una situación didáctica. *Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa*. Noviembre, año/vol 3. número 003. pp. 265-292. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, Distrito Federal, México.

- Cantoral, R. y Farfán, R. M. (2003). Matemática educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 6 (1). 27-40
- Cantoral, R., Farfán R., (2009), Documento de trabajo (SE) consultado en la página <http://cimete.uagro.mx/cantoral> el 23 de septiembre de 2009 a las 3:35 horas de México D.F.
- Cantoral, R., y Ferrari, M., (2004). Uno studio socioepistemologico della previsione. *La Matematica e la sua Didattica* 2, 33-70.
- Cantoral, R.; Molina, J. y Sánchez, M. (2005). Socioepistemología de la predicción. En J. Lezama, M. Sánchez y J. Molina (Eds.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (volumen 18, pp. 463-468). México: Clame.
- Cantoral, R.; Sánchez, M. y Molina, J. (2007). Aspectos numéricos y gráficos de la derivada de orden superior. En C. Crespo, P. Lestón. T. Ochoviet y C. Oropeza (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática*
- Cantoral, R. y López, J. (2010). La Socioepistemología: un estudio de su racionalidad. *Paradigma Educativa* (volumen 20, pp. 554-559). México: Clame., Vol. XXXI, Nº 1, Junio, pp. 103 – 122
- Chevallard, Y. (1997). *La transposición didáctica. Del Saber Sabio al Saber Enseñado*. Buenos Aires: AIQUE
- D'Amore, B., (2004). Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética: interacciones constructivistas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución. *Uno*. Barcelona, España. 35, 90-106.
- D'Amore, B., (2005). Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la Didáctica de la Matemática. Prefacio Ricardo Cantoral, México: Editorial Reverté. Traducido de D'Amore (2003).
- D'Amore, B. (2006). Didáctica de la Matemática. Capítulo 8. Matemática, didáctica de la matemática y lenguajes. pp. 251-257. Bogotá Colombia. Editorial Magisterio.
- D'Amore, B., Godino, D., J., (2007). El enfoque Ontosemiótico como un desarrollo de la teoría Antropológica en Didáctica de la Matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, Julio, año/vol. 10, número 002. pp. 191-218 México D. F.
- Duval, R., (1999). Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Cali, Colombia: Universidad del Valle. [Primera edición en francés, 1995, Berne: Peter Lang].

- Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education: China Lectures*. Dordrecht. Kluwer Academic Publisher.
- Fischbein, E., (1987). *Intuition in Science and Mathematics: An Educational approach*, Dordrecht, The Netherlands: Reidel.
- Gascón, J., (1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 18/1, nº 52, pp. 7-33. Universidad Autónoma de Barcelona.
- Godino, J., Batanero, C. y Font, V. (2007). The ontosemiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), 127-135.
- Godino, J., D., Font, V.; Contreras, A., y Wilhelmi, M., R. (2006). Una visión de la didáctica francesa desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 9(1), 117-150.
- Godino, J. (2010). Perspectiva de la didáctica de las matemáticas como disciplina tecnocientífica. Documento del curso de doctorado "Teoría de la educación matemática". Recuperable en Internet: <http://www.ugr.es/local/jgodino/> consultado en septiembre de 2010.
- Jssup, C., M. (1998). Resolución de Problemas y Enseñanza de las Ciencias *Naturales*. TEA: Tecne, Episteme y Didaxis - UPN. *Revista de la Facultad de Ciencia y Tecnología*. (3), p 41-52.
- Kline, M., (1992). *Mathematical Thought From Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, V. 3.
- Larson, Hostetler y Edwards. (2010). *Cálculo I*. 10ª edición, editorial McGraw Hill México D. F.
- Montiel, G., (2005a). Interacciones en un escenario en línea. El papel de la Socioepistemología en la resignificación del concepto de derivada. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 8 (2), 219-235.
- Montiel, G., (2005b). Una caracterización del contrato didáctico en un escenario virtual. En J. Lezama, M. Sánchez y J. Molina (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. La comprensión de la derivada como objeto de investigación* 295, (volumen 18, pp.667-672). México, D. F. Clame.

- Ramírez, E. (2006). Errores que cometen los estudiantes de primer semestre de ingenierías al resolver un problema de matemáticas. *Revista U.D.C.A, Actualidad y Divulgación Científica* 2(2) 51-61. ISSN 0123-4226U. Bogotá, Colombia.
- Ramírez, E. (2012). Tesis doctoral, *Enseñanza de la función derivada con el uso de infinitesimales como alternativa para reducir los conflictos semióticos de los estudiantes. Doctorado Interinstitucional entre las universidades Valle, Pedagógica Nacional y Francisco José de Caldas. Sin publicar.*
- Ramírez, E. (2017): La comunicación Matemática, un proceso de doble vía. Editorial Redipe - universidad Libre, ISBN: 978-1-945570-26-1, N° pág. 121.
- Stewart, J., (2010). Cálculo, conceptos y contextos, 5ª. Edición, editorial Thompson, México.
- Suárez, L. y Cordero, F., (2005). Modelación en Matemática Educativa. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 18. CLAME, 639-644.
- Vera, F., (1970). Euclides. Elementos de Geometría. Científicos griegos. Vol. I. Aguilar. Madrid. 1970.

